האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

# בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)

סמסטר הסתיו – תש"ס – מועד א'

המורים: פרופ' אהוד הרושובסקי, פרופ' אליהו שמיר הזמן: שעתיים

ענו על 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

**1.** תהי $L$ השפה של תחשיב היחסים המכילה את סימני הקבועים $\mathsf{c}_n$ לכל $n$ טבעי, וסימן יחס דו מקומי יחיד $\mathsf{S}$. נתונה קבוצת פסוקים מושתתת $\Gamma$ בשפה $L$ כך ש-$\Gamma$ אינה מכילה פסוק אטומי ושלילתו. כזכור, בהוכחת למת קיום המודל מגדירים מבנה $\mathcal{A}$ ל-$L$ ומוכיחים באינדוקציה שלכל פסוק $\phi$ ב-$\Gamma$ מתקיים $\mathcal{A} \models \phi$.

א. הגדירו את המבנה $\mathcal{A}$.

ב. הוכיחו את צעד האינדוקציה עבור $\phi = \psi_1 \wedge \psi_2$.

ג. הוכיחו את צעד האינדוקציה עבור $\phi = \neg\forall\mathsf{x}\psi$.

עבור סעיפים ב' ו-ג' ציינו במפורש באילו תכונות של קבוצת פסוקים מושתתת השתמשתם.

**2.** א. הוכיחו כי $\{\neg, \vee\}$ הינה קבוצת קשרים שלמה, כלומר: לכל פסוק $\phi$ של תחשיב הפסוקים קיים פסוק $\phi'$ השקול ל-$\phi$, כך שב-$\phi'$ מופיעים רק הקשרים $\neg$ ו- $\vee$.

ב. הוכיחו כי $\{\neg, \rightarrow\}$ הינה קבוצת קשרים שלמה.

**3.** תהי $L$ השפה המכילה שני סימני קבועים $\mathsf{c}_1$ ו-$\mathsf{c}_2$ וסימן יחס דו מקומי $\mathsf{R}$.

א. כמה מבנים יש לשפה $L$ שעולמם הוא הקבוצה $A = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ ?

ב. מתוך המבנים $\mathcal{A}$ של סעיף א', כמה מקיימים $\mathcal{A} \models \forall\mathsf{x}\forall\mathsf{y}((\mathsf{x} \approx \mathsf{y}) \rightarrow \mathsf{R}(\mathsf{x}, \mathsf{y}))$.

**4.** א. נתונה קבוצת פסוקים $\Gamma$ ופסוקים $\phi$ ו-$\sigma$ כך שמתקיים $\Gamma \models \phi$ וכן $\Gamma \cup \{\phi\} \models \sigma$. הוכיחו כי $\Gamma \models \sigma$.

ב. נתונה קבוצת פסוקים $\Gamma$ ונתונה נוסחה $\phi$ במשתנה חופשי יחיד $\mathsf{x}$ כך ש- $\Gamma \models \phi(\mathsf{c})$ ($\mathsf{c}$ סימן קבוע בשפה). בתוספת תנאי תחבירי מסויים ניתן להסיק כי $\Gamma \models \forall\mathsf{x}\phi$. כתבו תנאי זה והוכיחו בעזרתו כי $\Gamma \models \forall\mathsf{x}\phi$.

בהצלחה!

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

# בחינה בלוגיקה מתימטית (1) (80423)

סמסטר הסתיו – תש"ס – מועד ב׳

המורים: פרופ׳ אהוד הרושובסקי, פרופ׳ אליהו שמיר — הזמן: שעתיים

ענו על 3 מתוך 4 השאלות הבאות.

**1.** תהי $L$ השפה של תחשיב היחסים המכילה את סימני הקבועים $c_n$ לכל $n$ טבעי, וסימן יחס דו מקומי יחיד S. נתונה קבוצת פסוקים מושתתת $\Gamma$ בשפה $L$ כך ש-$\Gamma$ אינה מכילה פסוק אטומי ושלילתו. כמו כן ידוע כח עבור כל זוג טבעיים שונים $i$ ו-$j$, הפסוק $c_i \approx c_j$ אינו מופיע בקבוצה $\Gamma$.

כזכור, בהוכחת למת קיום המודל מגדירים מבנה $\mathcal{A}$ לשפה $L$ ומוכיחים כי $\mathcal{A}$ הוא מודל של $\Gamma$.

א. הוכיחו כי שמות העצם היחידים בשפה $L$ הם הקבועים.

ב. הגדירו את המבנה $\mathcal{A}$ במקרה זה.

ג. נסחו והוכיחו את הנחת האינדוקציה באופן כללי, והוכיחו את צעד האינדוקציה עבור $\phi = \exists x \psi$.

**2.** הוכיחו כי בהינתן טבלת אמת בפסוקים היסודיים $P_1, P_2, \ldots, P_n$ קיים פסוק מהצורה $\phi = \bigwedge_{i=1}^{M} \bigvee_{j=1}^{n} \chi_{i,j}$, כאשר כל $\chi_{i,j}$ הוא $P_j$ או $\neg P_j$, כך שטבלת האמת של $\phi$ היא הטבלה הנתונה.

**3.** א. כתבו פסוק $\phi_4$ בשפה המכילה את סימן השיוויון בלבד, כך שלמבנה $\mathcal{A}$ מתקיים $\mathcal{A} \models \phi$ אםם בעולם של $\mathcal{A}$ יש בדיוק שלושה איברים.

ב. תהי $L$ השפה המכילה שני סימני קבועים $c_1$ ו-$c_2$ וסימן פונקציה דו מקומי יחיד $F$. כמה מבנים יש לשפה $L$ שעולמם הוא הקבוצה $A = \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$ ?

**3.** א. נתונה קבוצת פסוקים $\Gamma$ ופסוקים $\phi_1, \phi_2, \theta$ כך שמתקיים $\Gamma \cup \{\phi_1\} \models \theta$ וכן $\Gamma \cup \{\phi_2\} \models \theta$. הוכיחו כי $\cup\{\phi_1 \vee \phi_2\} \models \theta$. ב. נתונה קבוצת פסוקים $\Gamma$, פסוק $\theta$, ונוסחה $\phi$ במשתנה חופשי יחיד x כך ש: $\Gamma \cup \{\exists \phi\} \models \theta$. הוכיחו את טענתכם.

בהצלחה!